

## ПРОБЛЕМИ ПРИ ПРИЛАГАНЕТО НА МЕТОДА НА НАЙ-МАЛКИТЕ КВАДРАТИ ЗА НАМИРАНЕ НА НАЙ-ВЕРОЯТНОТО МЯСТО НА КОРАБА

доц. д-р инж. Анастас Крушев  
Технически университет - Варна  
Контакти: [ask.yaniapress@gmail.com](mailto:ask.yaniapress@gmail.com)

**Резюме:** В статията се обосновава ревизия на крайните формули за аналитично намиране на най-вероятното място на кораба при допълнителни измервания и действието на случайни грешки. Освен това е обърнато внимание на отклоненията в координатите от действителните, описани в теорията за отстраняване действието на систематичните грешки в измерванията и посочен метод за определянето им.

**Ключови думи:** метод на най-малките квадрати, най-вероятно място на кораба, случайни и систематични грешки

## PROBLEMS IN THE APPLICATION OF THE LEAST SQUARES METHOD TO FIND THE MOST PROBABLE LOCATION OF THE SHIP

Assoc. Dr. Ing. Anastas Krushev  
Technical University of Varna  
Contacts: [ask.yaniapress@gmail.com](mailto:ask.yaniapress@gmail.com)

**Abstract:** The article justifies a revision of the final formulas for analytical finding of the most likely location of the ship in additional measurements and the action of random errors. In addition, there is a reversal of the deviations in coordinates from the actual ones described in the theory of eliminating the action of systematic errors in measurements and a specified method for determining them.

**Keywords:** least squares method, most likely ship location, random and systematic errors

В съществуващите до сега източници [1,3,5,6,8], които обосновават прилагането на метода на най-малките квадрати за намиране на най-вероятното място на кораба, освободено от случайни грешки при 3 и повече навигационни параметри е посочено, че при зададени линии със система (1):

$$\begin{aligned} a'_1 \Delta \varphi + b'_1 \Delta \omega - l'_1 &= \pm m_{u1} \\ a'_2 \Delta \varphi + b'_2 \Delta \omega - l'_2 &= \pm m_{u2} \\ \dots\dots\dots & \\ a'_i \Delta \varphi + b'_i \Delta \omega - l'_i &= \pm m_{ui} \\ \dots\dots\dots & \\ a'_n \Delta \varphi + b'_n \Delta \omega - l'_n &= \pm m_{un}, \end{aligned} \tag{1}$$

координатите на мястото  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta\omega$  се намират от решаването на система (2):

$$\frac{\partial\sigma}{\partial(\Delta\varphi)} = \sum a_i'^2 \cdot \Delta\varphi + \sum a_i' \cdot b_i' \cdot \Delta\omega - \sum a_i' \cdot l_i' = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial(\Delta\omega)} = \sum a_i' \cdot b_i' \cdot \Delta\varphi + \sum b_i'^2 \cdot \Delta\omega - \sum b_i' \cdot l_i' = 0$$

и те имат стойности (3):

$$\Delta\varphi = \frac{\sum a_i' \cdot l_i' \quad \sum a_i' b_i'}{\sum b_i' l_i \quad \sum b_i'^2}$$

$$\Delta\varphi = \frac{\sum a_i'^2 \quad \sum a_i' b_i'}{\sum a_i' b_i' \quad \sum b_i'^2} \quad (3)$$

$$\Delta\omega = \frac{\sum a_i'^2 \quad \sum a_i' l_i'}{\sum a_i' b_i' \quad \sum b_i' l_i'}$$

$$\Delta\omega = \frac{\sum a_i' b_i' \quad \sum b_i' l_i'}{\sum a_i'^2 \quad \sum a_i' b_i'}$$

$$\Delta\omega = \frac{\sum a_i' b_i' \quad \sum b_i'^2}{\sum a_i' b_i' \quad \sum b_i'^2}$$

Това не дава верен резултат, ако предварително не се анализира, как са получени коефициентите пред неизвестните, дори и ако всички линии са равнотегловни.

В общия случай, линиите на положението са с различни тегла  $p_i = \frac{1}{m_{\text{лп}i}}$ , което е нормално на практика и както е посочено в литература [1-9], координатите на мястото  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta\omega$  се намират от решаването на система (4):

$$\frac{\partial\sigma}{\partial(\Delta\varphi)} = \sum p_i \cdot a_i'^2 \cdot \Delta\varphi + \sum p_i \cdot a_i' \cdot b_i' \cdot \Delta\omega - \sum p_i \cdot a_i' \cdot l_i' = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial(\Delta\omega)} = \sum p_i \cdot a_i' \cdot b_i' \cdot \Delta\varphi + \sum p_i \cdot b_i'^2 \cdot \Delta\omega - \sum p_i \cdot b_i' \cdot l_i' = 0$$

като те имат стойности (5):

$$\Delta\varphi = \frac{\sum p_i \cdot a_i' \cdot l_i' \quad \sum p_i \cdot a_i' \cdot b_i'}{\sum p_i \cdot b_i' \cdot l_i' \quad \sum p_i \cdot b_i'^2}$$

$$\Delta\varphi = \frac{\sum p_i \cdot a_i'^2 \quad \sum p_i \cdot a_i' \cdot b_i'}{\sum p_i \cdot a_i' \cdot b_i' \quad \sum p_i \cdot b_i'^2} \quad (5)$$

$$\Delta\omega = \frac{\sum p_i \cdot a_i'^2 \quad \sum p_i \cdot a_i' \cdot l_i'}{\sum p_i \cdot a_i' \cdot b_i' \quad \sum p_i \cdot b_i' \cdot l_i'}$$

$$\Delta\omega = \frac{\sum p_i \cdot a_i' \cdot b_i' \quad \sum p_i \cdot b_i' \cdot l_i'}{\sum p_i \cdot a_i'^2 \quad \sum p_i \cdot a_i' \cdot b_i'}$$

$$\Delta\omega = \frac{\sum p_i \cdot a_i' \cdot b_i' \quad \sum p_i \cdot b_i'^2}{\sum p_i \cdot a_i' \cdot b_i' \quad \sum p_i \cdot b_i'^2}$$

И тези резултати не кореспондират, с резултатите, които биха се получили по всеки един от модифицираните, графо-аналитични методи на прилагането подхода с най-малките квадрати [2,3,5,6].

За да се получат верни координати е необходимо да се анализира смисъла на коефициентите в уравненията от система (1).

Известно е, че система (1) дава най-вероятното място на кораба при условие, че  $\sum_{i=1}^n m_{\text{лп}i}^2 = \min$ . Т.к.  $\pm m_{\text{лп}i} = \pm \frac{m_{ui}}{g_{ui}}$ , където  $g_{ui} = \sqrt{a_i'^2 + b_i'^2}$  се явява градиента на

линията на положението. За да се получи от система (1), еквивалентна система, на която дясната страна на уравненията, ще съдържа  $m_{\text{лп}i}$ , всяко едно от уравненията трябва да се раздели на стойността градиента, след което да се повдигне на квадрат, (6).

$$\left(\frac{a'_1}{\sqrt{a_i^2+b_i^2}} \cdot \Delta\varphi + \frac{b'_1}{\sqrt{a_i^2+b_i^2}} \cdot \Delta\omega + \frac{l'_1}{\sqrt{a_i^2+b_i^2}}\right)^2 = \left(\frac{\pm m_{ui}}{\sqrt{a_i^2+b_i^2}}\right)^2 = \left(\frac{\pm m_{ui}}{g_{ui}}\right)^2 = m_{\text{лп}i}^2 = \frac{1}{P_i} \quad (6)$$

Полагаме: 
$$\frac{a'_1}{\sqrt{a_i^2+b_i^2}} = a_i; \quad \frac{b'_1}{\sqrt{a_i^2+b_i^2}} = b_i; \quad \frac{l'_1}{\sqrt{a_i^2+b_i^2}} = l_i \quad (7)$$

и системата добива вида:

$$\begin{aligned} (a_1 \cdot \Delta\varphi + b_1 \cdot \Delta\omega + l_1)^2 &= \frac{1}{P_1} \\ (a_2 \cdot \Delta\varphi + b_2 \cdot \Delta\omega + l_2)^2 &= \frac{1}{P_2} \\ \dots\dots\dots \\ (a_i \cdot \Delta\varphi + b_i \cdot \Delta\omega + l_i)^2 &= \frac{1}{P_i} \\ \dots\dots\dots \\ (a_n \cdot \Delta\varphi + b_n \cdot \Delta\omega + l_n)^2 &= \frac{1}{P_n} \end{aligned} \quad (8)$$

Диференцирайки сумата от всички уравнения в горния вид, спрямо  $\Delta\varphi$  и  $\Delta\omega$  и приравнявайки сумите от диференциалите на нула (търсим екстремума на функцията), ще се получи работеща система от 2 уравнения с 2 неизвестни, решението на която дава действителните координати на най-вероятното място:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial(\Delta\varphi)} = \sum p_i \cdot a_i^2 \cdot \Delta\varphi + \sum p_i \cdot a_i \cdot b_i \cdot \Delta\omega - \sum p_i \cdot a_i \cdot l_i = 0$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial(\Delta\omega)} = \sum p_i \cdot a_i \cdot b_i \cdot \Delta\varphi + \sum p_i \cdot b_i^2 \cdot \Delta\omega - \sum p_i \cdot b_i \cdot l_i = 0$$

(9)

$$\Delta\varphi = \frac{\sum p_i \cdot a_i \cdot l_i \quad \sum p_i \cdot a_i \cdot b_i}{\sum p_i \cdot b_i^2 \cdot l_i' \quad \sum p_i \cdot b_i^2}$$

$$\frac{\sum p_i \cdot a_i^2 \quad \sum p_i \cdot a_i \cdot b_i}{\sum p_i \cdot a_i \cdot b_i \cdot \quad \sum p_i \cdot b_i^2}$$

$$\Delta\omega = \frac{\sum p_i \cdot a_i^2 \quad \sum p_i \cdot a_i \cdot l_i}{\sum p_i \cdot a_i \cdot b_i \quad \sum p_i \cdot b_i \cdot l_i}$$

$$\frac{\sum p_i \cdot a_i^2 \quad \sum p_i \cdot a_i \cdot l_i}{\sum p_i \cdot a_i \cdot b_i \cdot \quad \sum p_i \cdot b_i^2}$$

Следователно, коефициентите пред неизвестните в система (1), трябва да се намират винаги във функционална зависимост от градиента на конкретната линия на положението, като изразяват посоката на градиента,  $\tau_i$  и преноса в линията  $n_i$ :

$$\frac{a'_1}{\sqrt{a_i^2+b_i^2}} = \cos \tau_i; \quad \frac{b'_1}{\sqrt{a_i^2+b_i^2}} = \sin \tau_i; \quad \frac{l'_1}{\sqrt{a_i^2+b_i^2}} = n_i \quad (10)$$

Нека мястото на кораба е определено по  $n$  линии на положението, които са обременени едновременно със случайни грешки  $\pm m_{ui}$  при измерване на навигационните параметри  $U_i$  и една и съща систематична грешка, водеща до сместване  $\delta$  във всяка една от линиите. Уравненията на линиите са показани с отчитането на изводите, направени по-горе и ще имат вида:

$$\begin{aligned} a_1 \Delta \varphi + b_1 \Delta \omega - l_1 + \delta &= \pm m_{\text{лп}1} \\ \dots \\ a_i \Delta \varphi + b_i \Delta \omega - l_i + \delta &= \pm m_{\text{лп}i} \\ \dots \\ a_n \Delta \varphi + b_n \Delta \omega - l_n + \delta &= \pm m_{\text{лп}n} \end{aligned} \tag{11}$$

където  $\pm m_{\text{лп}i} = \pm \frac{m_{ui}}{g_{ui}}$  се получава от отношението на случайната грешка към градиента на измерения навигационен параметър и представлява сместването в линията на положението.

Тази система се състои от  $n$  уравнения и  $n+3$  неизвестни -  $\pm m_{\text{лп}i}$ ,  $\Delta \varphi$ ,  $\Delta \omega$  и  $\delta$ , като систематичната грешка се проявява при всяка от линиите. Системата в този си вид е неопределена и допуска безброй много решения.

Като се има предвид, че случайните грешки в измерванията са подчинени на Закона за нормално разпределение на Гаус, система (11) може да се реши, като се постави условието, сумата от квадратите на случайните грешки в линиите на положението да бъде минимална (12), при което най-вероятното място на кораба, освободено от случайни грешки, ще се намира под екстремума на Гаусовата повърхност:

$$\sum_{i=1}^n m_{\text{лп}i}^2 = \min \tag{12}$$

Остава проблемът със систематичната грешка, който може да се реши, като се съберат уравненията на система (11) и от получената сума се намери зависимост за намиране на систематичната грешка  $\delta$ . Тук трябва да се има предвид, че сумата на случайните грешки, подчинени на Закона за нормално разпределение, клони към нула:

$$\sum_{i=1}^n m_{\text{лп}i} = 0 \tag{13}$$

Получава се израза:

$$\delta = -\frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n a'_i \cdot \Delta \varphi + \sum_{i=1}^n b'_i \cdot \Delta \omega - \sum_{i=1}^n l'_i) \tag{14}$$

Следователно, ако са известни  $\Delta \varphi$ ,  $\Delta \omega$ , може да се намери големината на систематичната грешка [3,6,7].

Уравненията на система (11) се повдигат на квадрат и се събират. Получената сума се диференцира последователно спрямо  $\Delta \varphi$ ,  $\Delta \omega$  и с отчитане на израз (14) се стига до система от две уравнения с две неизвестни, даващи координатите на определеното място, при изключена систематична грешка.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial (\Delta \varphi)} = & [\sum p_i \cdot (a_i - \frac{1}{n} \sum a_i)^2] \cdot \Delta \varphi + [\sum p_i \cdot (a_i - \frac{1}{n} \sum a_i) \cdot (b_i - \frac{1}{n} \sum b_i)] \cdot \Delta \omega - [\sum p_i \cdot (a_i - \\ & \frac{1}{n} \sum a_i) \cdot (l_i - \frac{1}{n} \sum l_i)] = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial (\Delta \omega)} = [\sum p_i \cdot (a_i - \frac{1}{n} \sum a_i) \cdot (b_i - \frac{1}{n} \sum b_i)] \cdot \Delta \varphi + [\sum p_i \cdot (b_i - \frac{1}{n} \sum b_i)^2] \cdot \Delta \omega - [\sum p_i \cdot (b_i - \frac{1}{n} \sum b_i) \cdot (l_i - \frac{1}{n} \sum l_i)] = 0, \quad (15)$$

където  $p_i = \frac{1}{m_{\text{лп}i}}$  е теглото на линията на положението.

Получените координати от изрази (15)

$$\Delta \varphi = \frac{[\sum p_i \cdot (a_i - \frac{1}{n} \sum a_i) \cdot (l_i - \frac{1}{n} \sum l_i)] \quad [\sum p_i \cdot (a_i - \frac{1}{n} \sum a_i) \cdot (b_i - \frac{1}{n} \sum b_i)]}{\frac{[\sum p_i \cdot (b_i - \frac{1}{n} \sum b_i) \cdot (l_i - \frac{1}{n} \sum l_i)] \quad \sum p_i \cdot (b_i - \frac{1}{n} \sum b_i)^2}{\sum p_i \cdot (a_i - \frac{1}{n} \sum a_i)^2} \quad [\sum p_i \cdot (a_i - \frac{1}{n} \sum a_i) \cdot (b_i - \frac{1}{n} \sum b_i)]}$$

$$\Delta \omega = \frac{[\sum p_i \cdot (a_i - \frac{1}{n} \sum a_i)^2] \quad [\sum p_i \cdot (a_i - \frac{1}{n} \sum a_i) \cdot (l_i - \frac{1}{n} \sum l_i)]}{\frac{[\sum p_i \cdot (b_i - \frac{1}{n} \sum b_i) \cdot (l_i - \frac{1}{n} \sum l_i)] \quad [\sum p_i \cdot (b_i - \frac{1}{n} \sum b_i) \cdot (l_i - \frac{1}{n} \sum l_i)]}{\sum p_i \cdot (a_i - \frac{1}{n} \sum a_i)^2} \quad [\sum p_i \cdot (a_i - \frac{1}{n} \sum a_i) \cdot (b_i - \frac{1}{n} \sum b_i)]}$$

$$\frac{[\sum p_i \cdot (a_i - \frac{1}{n} \sum a_i) \cdot (b_i - \frac{1}{n} \sum b_i)] \quad \sum p_i \cdot (b_i - \frac{1}{n} \sum b_i)^2}{\sum p_i \cdot (a_i - \frac{1}{n} \sum a_i) \cdot (b_i - \frac{1}{n} \sum b_i)} \quad \sum p_i \cdot (b_i - \frac{1}{n} \sum b_i)^2} \quad (16)$$

не дават действителното място на кораба, защото точката, която им съответства е получена от пресичането на ъглополвящите между градиентите и отстои на величина  $\delta = -\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^n a_i' \cdot \Delta \varphi + \sum_{i=1}^n b_i' \cdot \Delta \omega - \sum_{i=1}^n l_i')$ , от всяка линия на положението – радиус на вписаната окръжност между линиите с център  $\Delta \varphi$ ,  $\Delta \omega$ .

За да се получи действителното място на кораба с координати  $\Delta \varphi_0$  и  $\Delta \omega_0$  се строят притеглените ъглополвящи между линиите на положението, като всеки ъгъл  $\theta_{ij}$  се дели на части  $\alpha_{ij}$  и  $\beta_{ij}$ , изчислявани по зависимостите (17) [ 7 ]:

$$\alpha_{ij} = \frac{P_i}{P_i + P_j} \theta_{ij} \quad (17)$$

$$\beta_{ij} = \frac{P_j}{P_i + P_j} \theta_{ij}$$

Място на кораба с координати  $\Delta \varphi_0$  и  $\Delta \omega_0$  се намира в пресечната точка на притеглените ъглополвящи.

От тук е необходимо да се даде отговор на въпроса, каква е допуснатата систематична грешка в измерените навигационни параметри за да се изключи от следващите измервания

В случай на определяне мястото на кораба по пеленги, които съдържат систематична грешка  $\varepsilon_{\text{п}}$ , от картата се снемат истинските направления към ориентирите  $\Pi_{ki}$ , съпоставят се с измерените пеленги,  $\Pi_{\text{и}i}$ , описани с уравненията на система (11) и се получава поправката на компаса  $\Delta K$ .

$$\Pi_{\text{и}i} - \Pi_{ki} = \varepsilon_{\text{п}}; \quad \Delta K = -\varepsilon_{\text{п}} \quad (18)$$

Например, нека мястото на кораба е определено по три пеленга, към три ориентира, със стойности:  $\Pi_1=015,0^0$ ;  $\Pi_2=330,0^0$  и  $\Pi_3=215,0^0$ . Разстоянията до ориентирите са съответно  $D_1=7,6$  NM;  $D_2=10,6$  NM;  $D_3=7,4$  NM (*фиг. 1*).

В пеленгите е заложена систематична грешка  $\varepsilon_{\Pi} = +5^{\circ}$  и те са измерени със средно-квадратична грешка,  $m_{\Pi} = \pm 0,5^{\circ}$ .

Ако се нанесат линиите на картата, те ще се опишат от следната система уравнения, давайки фигура на грешките триъгълник:

$$+0,90 \Delta\varphi - 3,75 \Delta\omega - 3,375 = 0$$

$$-3,20 \Delta\varphi - 5,60 \Delta\omega - 17,92 = 0$$

$$-1,50 \Delta\varphi + 2,20 \Delta\omega - 3,30 = 0$$

Обработвайки системата, с отчитане (6) и (7) се получава:

$$\cos 285^0 \Delta\varphi + \sin 285^0 \Delta\omega - 0,90 = 0$$

$$\cos 240^0 \Delta\varphi + \sin 240^0 \Delta\omega - 2,80 = 0$$

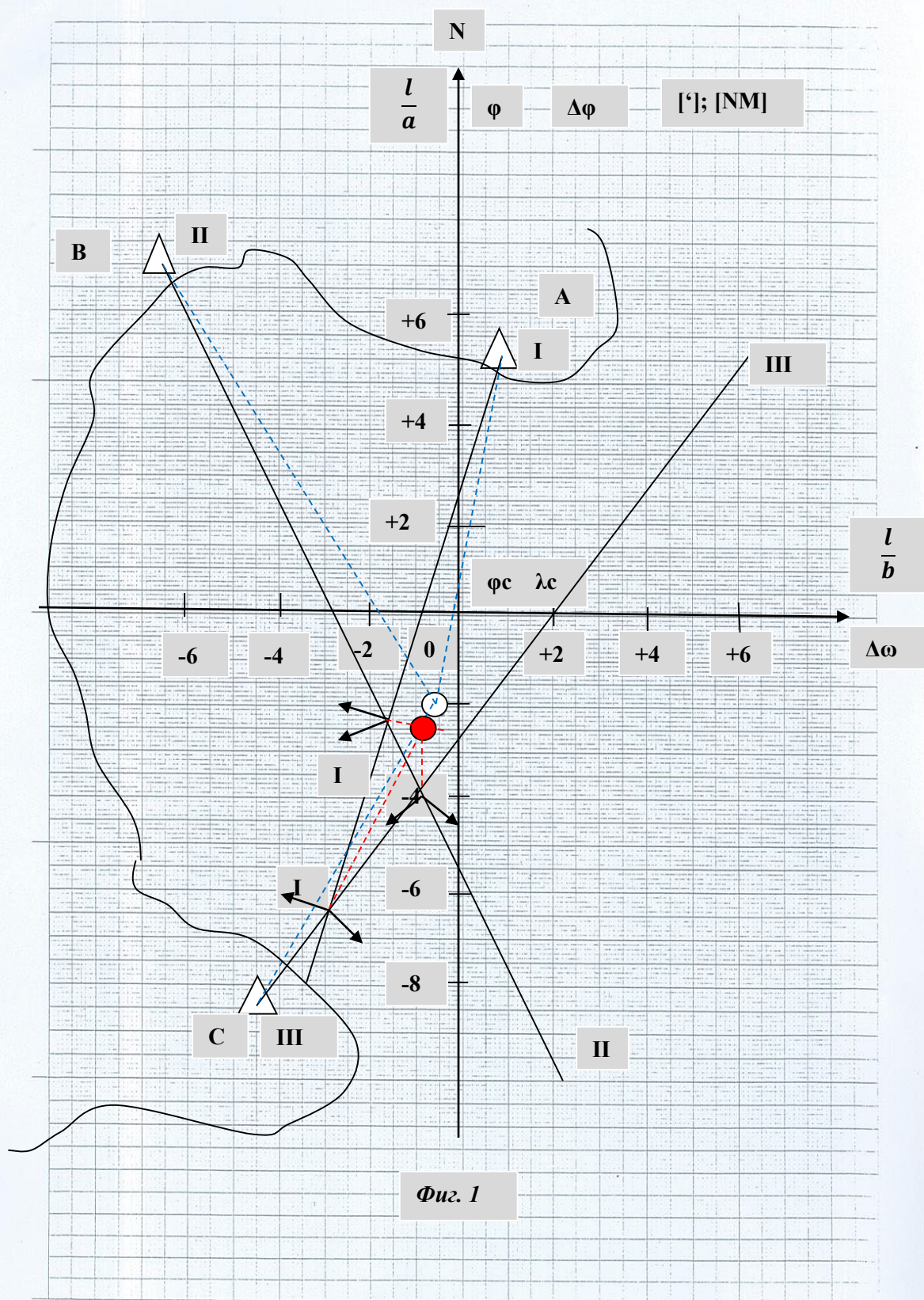
$$\cos 125^0 \Delta\varphi + \sin 125^0 \Delta\omega - 1,15 = 0$$

Решението на системата по известната до сега методика дава следните резултати:  $\Delta\varphi = -2,7'$ ;  $\Delta\omega = -1,1'$  и  $\delta = 0,5$  NM. При това направленията от получената точка към трите ориентира са:  $\Pi_1=011,2^0$ ;  $\Pi_2=328,0^0$  и  $\Pi_3=210,2^0$ , което очевидно не кореспондира със заложенията грешка в пеленгите.

В редица публикации се препоръчва, да се осреднят получените разлики и резултатът да се приеме за поправка на компаса. Но тези резултати ще бъдат във функционална зависимост от разстоянията до обектите и разположението им спрямо мястото на кораба, което винаги ще води до отклонения от действителната стойност на поправката на компаса.

С прилагането на формули (17), за координатите се получава  $\Delta\varphi = -2,1'$ ;  $\Delta\omega = -0,8'$  и направленията към ориентирите стават  $\Pi_1=010,0^0$ ;  $\Pi_2=325,0^0$  и  $\Pi_3=210,0^0$  и с отчитане на (18) поправката на компаса добива стойност  $\Delta K = -5^{\circ}$ .





В случай на определяне мястото на кораба по разстояния, които съдържат систематична грешка  $\varepsilon_D$ , от картата се измерват истинските разстояния до ориентирите  $D_{ki}$ , съпоставят се с измерените  $D_{измi}$ , описани с уравненията на система (11) и се получава поправката за разстояние  $\Delta D$ .

$$\Delta D = (-\varepsilon_D) = D_{измi} - D_{ki} \quad (19)$$

Например, нека мястото на кораба е определено по три разстояния, към три ориентира, със стойности:  $D_1=10,0$  NM;  $D_2=9,5$  NM;  $D_3=10,4$  NM. Направленията към ориентирите са съответно:  $\Pi_1=321,30^0$ ;  $\Pi_2=256,5^0$  и  $\Pi_3=209,8^0$ . (фиг. 2).

В разстоянията е заложена систематична грешка  $\varepsilon_a = +2$  NM и те са измерени със средно-квадратична грешка,  $m_{D_i} = \pm 0,05 \cdot D_i$

Ако се нанесат линиите на картата, те ще се опишат от следната система линейни уравнения, всяко от които е уравнение на допирателна към съответната дистанция. Фигура на грешките е сферичен триъгълник.

$$\begin{aligned} -1,5 \Delta\varphi + 1,2 \Delta\omega - 1,8 &= 0 \\ +1,2 \Delta\varphi + 5,0 \Delta\omega - 6,0 &= 0 \\ +4,9 \Delta\varphi + 2,8 \Delta\omega - 13,7 &= 0 \end{aligned}$$

Обработвайки системата, с отчитане (6) и (7) се получава:

$$\begin{aligned} \cos 141,3^0 \Delta\varphi + \sin 141,3^0 \Delta\omega - 0,937 &= 0 \\ \cos 76,5^0 \Delta\varphi + \sin 76,5^0 \Delta\omega - 1,167 &= 0 \\ \cos 29,8^0 \Delta\varphi + \sin 29,8^0 \Delta\omega - 2,431 &= 0 \end{aligned}$$

Аналогично, решението на системата по известната до сега методика дава следните резултати:  $\Delta\varphi = +0,8'$ ;  $\Delta\omega = -1,5'$  и  $\delta = 2,5$  NM. При това, разстоянията от получената точка към трите ориентира са:  $D_1=7,6$  NM;  $D_2=7,0$  NM;  $D_3=8,2$  NM, което очевидно не кореспондира със заложената грешка в дистанциите.

С прилагането на формули (17), за координатите се получава  $\Delta\varphi = +0,65'$ ;  $\Delta\omega = -1,15'$  и разстоянията към ориентирите стават  $D_1=8,0$  NM;  $D_2=7,5$  NM;  $D_3=8,4$  NM и с отчитане на (19) поправката на разстоянието добива стойност  $\Delta D = -2,0$  NM.

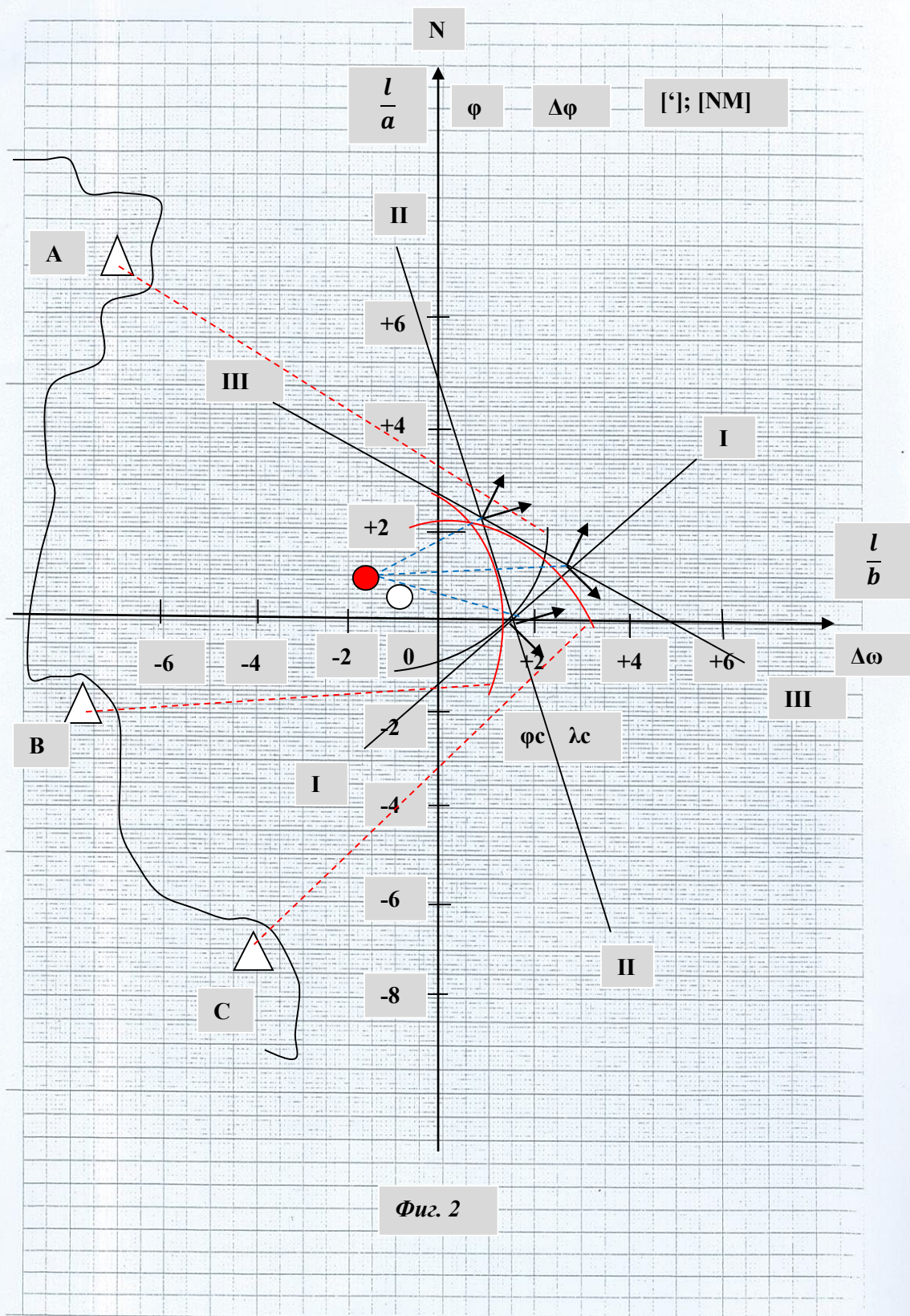
Истинските стойности на навигационните параметри, могат да се получат и с формулите за аналитично счисление, т.к. координатите на ориентирите  $\Delta\varphi_i$  и  $\Delta\omega_i$  са известни.

Ако с реалните координати  $\Delta\varphi_0$  и  $\Delta\omega_0$  се замести в система (11), като се отчетат действителните смествания в линиите  $\delta_i$ , ще се получат стойностите на конкретните средно-квадратични грешки за всяка от линиите на положението.

$$a'_i \Delta\varphi_0 + b'_i \Delta\omega_0 - l'_i + \delta_i = \pm m_{лпi} \quad (20)$$

Смисълът на гореизложеното е да се даде методологията за получаване стойността на допусната систематична грешка в измерването, която трябва да бъде изключена при извършване на следващи наблюдения.





Посочените в литературата до сега теоретични резултати, не само не дават стойността на реално допусната систематична грешка, но и посочват координати на място, което би се получило при равнотегловни линии на положението, което на практика е невъзможно.

#### ***Изводи:***

1/. Прилагането на метода на най-малките квадрати трябва да става само след като линиите на положението са написани в нормален вид, т.е. отчитайки модула и посоката на градиента за всяка една от тях.

2/. Мястото, освободено от систематични грешки, при 3 линии на положението се намира в пресечната точка на притеглените ъглополвящи (бисектриси) на фигурата на грешките.

3/. Когато, линиите са обременени със систематична и случайни грешки, се процедира по следния начин:

- ако систематичната грешка е малка и съизмерима със случайните, тя се приема като случайна и фигурата на грешките се разкрива по един от известните начини, основани на метода на най-малките квадрати;
- ако систематичната грешка е значителна, фигурата на грешките се разкрива, като обременена със систематични грешки и намереното място на кораба се оценява с елиптична или кръгова грешка, за да се види какво е влиянието на случайните грешки.

4/. Когато, преобладават систематичните грешки, фигурата, породена от случайни грешки се транслира в района на точката, получена от пресичането на притеглените ъглополвящи.

#### ***Литература:***

- 1/. В.В. Афанасьев, В.А. Логиновский, Расчет координат места судна по избыточным навигационным измерениям, академия „Макаров”, С. Петербург, 2002.
- 2/. В.Д. Большаков, Теория ошибок наблюдений с основами теории вероятностей, М., Недра, 1965.
- 3/. В.Т. Кондрашихин, Определение места, М., Транспорт, 1981.
- 4/. Математические основы судовождения, В.П. Кожухов, А.М. Жухлин, В.Т. Кондрашихин, В.А. Логиновский, А.Н. Лукин, М., Транспорт, 19893.
- 5/. Попеко Г.П., Соломатин Е.П., Навигация. Курс кораблевождения, т.1, Л., УГС ВМФ, 1961.
- 6/. Хаджиатанасов П., Навигация, т.1, В.ТУ, 1997.
- 7/. Хаджиатанасов П., Александров А., Ръководство за решаване на задачи по теория на навигационните определения, С. ВИ, 1983.
- 8/. The Principles of Navigation - part 1, Nautical Institute, London, 2008.
- 9/. Wlodzimierz Filipowicz, Position fixing and its accuracy evaluation, Scientific Journals 2013,36(108)z.1,pp.42-48.