

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ
«ПЕРЕДВИЖНАЯ НАГРУЗКА – БЕСКОНЕЧНО ДЛИННАЯ БАЛКА –
УПРУГОЕ ОСНОВАНИЕ, РАССЛАБЛЕННОЙ ПОДЗЕМНОЙ
ВЫРАБОТКИ»**

**Самедов А.М., д.т.н., проф. Мани А.Д.Д., аспирант. Сницарь
М.А., магистр, Паничаров Г.Х., к.т.н. Варненский Свободный
Университет г.Варна, Болгария**

Проблема строительства надземных зданий и сооружений на подрабатываемых территориях при добыче полезных ископаемых до сих пор остается недостаточно изученной и требует выполнения дополнительных мероприятий, которые даже часто не обеспечивают долговечности и устойчивости сооружений, хотя сопровождается расходами больших материальных ресурсов. С целью учета отрицательных влияний подземной выработки на поверхностные здания и сооружения нами были выполнены комплексные экспериментально – теоретические исследования, которые позволили математически моделировать некоторые процессы и системы в геомеханике и изучить совместную работу конструкции наземных сооружений с нарушенными грунтовыми основаниями в результате мульды оседания, сдвижений и деформаций от подземной разработки. Предложены различные эффективные меры защиты по обеспечению устойчивости и долговечности надземных сооружений с учетом отрицательных влияний подземной выработки. Совершенствованы существующие методы расчетов путем математического моделирования системы.

The problem of construction of above-ground buildings and structures on undermined areas of mining are still poorly understood and requires additional activities that are often not even provide durability and stability of the structures, although accompanied by a large expenditure of material resources. In order to reflect the negative effects of underground workings on the surface buildings and structures we have performed comprehensive experimental - theoretical studies to mathematically simulate some of the processes and systems in geomechanics and work together to explore the design of terrestrial plants with broken ground bases

as a result of subsidence troughs, displacement and strain from underground mining. Proposed various measures of protection to ensure the sustainability and durability of aboveground structures, taking into account the negative effects of the underground workings. Improve existing methods of calculation by mathematical simulation of the system.

Для обеспечения прочности, устойчивости и эксплуатационной надежности надземных зданий и сооружений, проектируемых возводимых на подрабатываемых территориях при добыче полезных ископаемых должны предусматриваться серии специальных мероприятий, обусловленных особенностями строительства в этих условиях. К этим мероприятиям относятся специальные инженерные меры защиты, мероприятия по выравниванию здания или его частей, закрепление разрыхленных грунтов оснований и т.д.

Подрабатываемые территории при добыче полезных ископаемых характеризуется образованием сдвигов и деформаций земной поверхности, мульды оседаний большой величины и глубины, разрыхлением и нарушением структуры верхних слоев массива, возникновением трещин и уступов, которые создают неблагоприятные условия по обеспечению долговечности надземных сооружений. Горные подземные разработки создают в массиве верхних слоев анизотропные свойства, такие как прочностные, деформационные фильтрационные анизотропии, что очень затрудняет математическое моделирование процессов и систем протекающих в геомеханике.

Существующие расчетные методы [1÷5] и реологические модели [6÷8], предложенные для описания состояния различных видов грунта, часто становятся неприемлемыми при учете отрицательных влияний подземных разработок на математическое моделирование процессов и систем в геомеханике.

Совокупности сложных проблем, протекающих в геомеханике с учетом отрицательных влияний подземной выработки, требуют проведения комплексных экспериментально-теоретических исследований по математическому моделированию процессов и систем в геомеханике.

Для примера рассмотрим расчет геомеханической железных дорог на упругом основании, расслабленном с оседания от подземной выработки.

В инженерной практике часто встречаются задачи строительства железных дорог на подрабатываемых территориях. Необходимо знать, что основания железной дороги на участках, где осуществлены подземные выработки полезных ископаемых, ослаблены сдвигом и деформацией земной поверхности. В результате сдвигов и деформаций земной поверхности происходит разрыхление грунтового массива, образуется на поверхности «мульда оседания», которая во время строительства железных дорог засыпается грунтом. Естественно, не только на участках «мульды оседания», но и за пределами ее на большой протяженности грунтовый массив обладает разрушенной структурой, а засыпанная часть «мульды оседания» относится к насыпным грунтам. Таким образом, в расслабленных участках грунтового основания под железной дорогой до строительства требуется проводить комплексное исследование, сопровождающиеся специальными инженерными мероприятиями по закреплению данного участка, ослабленного под выработкой. Естественно, такой большой по протяженности участок и большая мощность грунтового массива требует неограниченного расхода твердеющих материалов и технологическую сложность закрепления массива. Поэтому зачастую пренебрегают влиянием ослабленности основания в результате подземной выработки и при расчете системы не учитывают нарушения структуры на участках выработки и даже состояния насыпного грунта заполненного объема «мульды оседания». Не учет таких важных факторов, как нарушенная структура грунтового массива на большом участке, а также насыпной грунт в мульде оседания часто приводит к разрушению железной дороги на этих участках. Во избежание разрушения дорог зачастую уменьшают скорость движения подвижного состава на определенном участке дороги, хотя уменьшение скорости подвижного состава, даже до минимума, не дает достаточной гарантии по обеспечению долговечности эксплуатации железных дорог.

В связи с выше изложенным, представляет большой интерес выяснение влияния **инерционности полупространства на динамические смещения и напряжения в балке** при движении по ней силы. При этом будем рассматривать геомеханическую систему «передвижная нагрузка – безконечно – длинная балка - линейно-упругое основание».

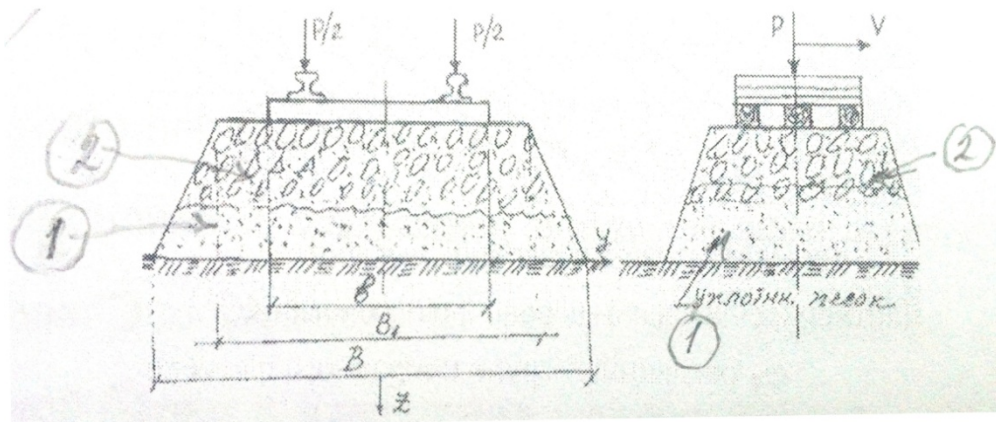


Рис. 1. Расчетная схема бесконечно длинной балки.

1 – уплотненный песок; 2 – гравийно – песчаный слой.

На рис. 1 показана совместная работа системы с упругим рыхлым грунтовым основанием.

В данной системе основание с нарушенной структурой грунта будем считать, как линейно-упругое винклеровское основание, бесконечно - длинную балку (рельсы на шпалах) с определенной жесткостью и передвижные нагрузки, как периодически действующие силы, являющиеся источником установившихся колебаний системы. Деформационные параметры грунтового основания для системы будем учитывать с помощью модуля деформации рыхлого грунта с нарушенной структурой E_1 и коэффициента Пуассона того же грунта μ_1 (рис. 2).

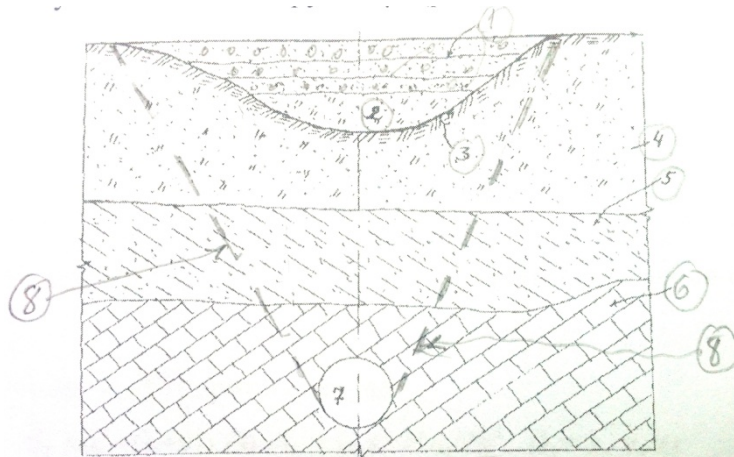


Рис.2. Мульды оседаний от подземной выработки.

1-послойно уплотненное песчано – щебеночное основание; 2-уплотненный грунт; 3-границы мульды оседаний; 4-грунт природного сложения; 5-супесь; 6-известняк и оргаллиты; 7-подземная выработка, 8 – разрыхленная зона.

Следует отметить, что система «передвижная нагрузка - бесконечно-длинная балка - упругое основание» даже в грунтовых основаниях ненарушенной структуры от влияния передвижной силы вызывает «местное уплотнение» грунта и искривление поверхности оснований, что сопровождается дополнительными изгибающими моментами, перерезывающими силами и инерцией поворота при возрастании скорости подвижного состава. Это характерно для установившихся колебаний бесконечно длинной балки и изменения колебательного процесса системы целиком.

Геомеханическая система данной задачи может быть математически смоделирована дифференциальным уравнением движения следующего характера:

$$\nu_1 \Delta u_i + (\lambda + \nu_1) \partial \theta / \partial i = \rho_1 \cdot \partial^2 u_i / \partial t^2, \quad (i = x_1, y_1, z_1) \quad (1)$$

где u_{x1} , u_{y1} , u_{z1} - компоненты перемещений вдоль осей x_1 , y_1 , z_1 ; Δu_i - приращение компоненты перемещений.

$$\theta = \partial u_{x1} / \partial x_1 + \partial u_{y1} / \partial y_1 + \partial u_{z1} / \partial z_1 \quad (2)$$

θ - относительное объемное расширение; ν_1 и λ , - постоянные Ляма для оснований связаны с коэффициентом Пуассона μ_1 и модулем деформации E_1 соотношениями:

$$\lambda = \mu_1 E_1 / (1 + \mu_1)(1 - 2\mu_1); \quad \nu_1 = E_1 / 2(1 + \mu_1) \quad (3)$$

ρ_1 - плотность грунта оснований нарушенной структуры.

Передвижная нагрузка требует изменения, т.е. передвижение координатной системы. Поэтому вместо координат x_1 , y_1 , z_1 вводим подвижную систему координат $x = x_1 - Vt$, y , z , перемещающуюся вместе с силой P .

Тогда уравнения (1) принимают вид:

$$v_1 \Delta u_i + (\lambda + v_1) \partial \theta / \partial i_1 = \rho_1 V^2 \cdot \partial^2 u_i / \partial x^2, \quad (i_1 = x, y, z) \quad (4)$$

Системе уравнений (7.138) можно удовлетворять, взяв

$$u_i = \partial F / \partial i_1 + u_{1,i1}, \quad (i_1 = x, y, z) \quad (5)$$

При этом

$$(\Delta - h^2) F = 0 \quad (6)$$

и значения $u_{1,i1}$ должны удовлетворять уравнениям

$$(\Delta - k^2) u_{1,i1} = 0, \quad (i_1 = x, y, z) \quad (7)$$

$$\partial u_{1,x} / \partial x + \partial u_{1,y} / \partial y + \partial u_{1,z} / \partial z = 0 \quad (8)$$

где ∂F - дифференциал функции F в координатах x, y, z определяется ниже; V - скорость движения силы; t - отрезок времени;

$\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$ - оператор Лапласа;

$$k^2 = \rho_1 V^2 / v_1; \quad h^2 = \rho_1 V^2 / \lambda + 2v_1$$

Учитывая условия симметрии относительно продольной оси y , решение уравнений (6) и (7) берем в виде

$$u_{1,x} = \int \int_0 [A_1(\alpha, \beta) \sin \alpha x + C_1(\alpha, \beta) \cos \alpha x] e^{-\eta_2 z} \cos \beta y d\alpha d\beta \quad (9)$$

$$u_{1,y} = \int \int_0 [A_2(\alpha, \beta) \cos \alpha x + C_2(\alpha, \beta) \sin \alpha x] e^{-\eta_2 z} \sin \beta y d\alpha d\beta \quad (10)$$

$$u_{1,z} = \int \int_0 [A_3(\alpha, \beta) \cos \alpha x + C_3(\alpha, \beta) \sin \alpha x] e^{-\eta_2 z} \cos \beta y d\alpha d\beta \quad (11)$$

$$F = \int \int_0 [A_4(\alpha, \beta) \sin \alpha x + C_4(\alpha, \beta) \cos \alpha x] e^{-\gamma_1 z} \cos \beta y d\alpha d\beta \quad (12)$$

Уравнения (6) и (7) удовлетворяются при условии, что

$$\eta_1^2 = \alpha^2 + \beta^2 - h^2 \alpha^2; \quad \eta_2^2 = \alpha^2 + \beta^2 - k^2 \alpha^2 \quad (13)$$

здесь

$A_1(\alpha, \beta), A_2(\alpha, \beta), A_3(\alpha, \beta), A_4(\alpha, \beta), C_1(\alpha, \beta), C_2(\alpha, \beta), C_3(\alpha, \beta), C_4(\alpha, \beta)$

коэффициенты тригонометрических функций, зависящих от корней уравнений α, β .

Решение задачи в предположении, что при $z = 0$ отсутствуют касательные напряжения, т.е.

$$\tau_{xz} = V(\partial u_z / \partial x + \partial u_x / \partial z) \Big|_{z=0} = 0 \quad (14)$$

Для удовлетворения условиям (14) коэффициенты при произведениях тригонометрических функций приравняем нулю. Тогда для нахождения коэффициентов A_i (α, β), C_i (α, β) получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \alpha C_3 - \eta_2 C_1 - 2\alpha\eta_1 C_4 &= 0, \\ -\alpha A_3 - \eta_2 C_1 + 2\alpha\eta_1 A_4 &= 0, \\ \alpha A_1 + \beta A_2 - \eta_2 A_3 &= 0, \\ -\beta C_3 - \eta_2 C_2 + 2\eta_1\beta C_4 &= 0, \\ -\beta A_3 - \eta_2 A_2 + 2\eta_1\beta A_4 &= 0, \\ \alpha C_1 + \beta C_2 - \eta_2 C_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Из (15) находим:

$$A_1 = \alpha/\beta \cdot A_2; \quad A_3 = \alpha^2 + \beta^2 / \beta\eta_2 \cdot A_2; \quad A_4 = \alpha^2 + \beta^2 + \eta_2^2 / 2\beta\eta_1\eta_2 \cdot A_2;$$

$$(C_1 = -\alpha/\beta \cdot C_2; \quad C_3 = \alpha^2 + \beta^2 / \beta\eta_2 \cdot C_2; \quad C_4 = \alpha^2 + \beta^2 + \eta_2^2 / 2\beta\eta_1\eta_2 \cdot C_2) \quad (16)$$

Вместо неизвестных параметров A_2, C_2 вводим новые постоянные A'_2, C'_2 , которые связаны с параметрами A_2 и C_2 с помощью:

$$A_2 = 2\beta\eta_2 A'_2 / 2(\eta_1^2 - \eta_2^2)(1-\mu)E_1; \quad C_2 = 2\beta\eta_2 C'_2 / 2(\eta_1^2 - \eta_2^2)(1-\mu)E_1 \quad (17)$$

Для определения перемещения u_z в формуле (6) получим значение:

$$u_z = 1/E_1 \int_0^{\alpha} [e^{-\eta_1 z} + (\alpha^2 + \beta^2)(e^{-\eta_2 z} - e^{-\eta_1 z}) / (1 - \mu_1)(\eta_1^2 - \eta_2^2)] (A'_2 \cos \alpha x + C'_2 \sin \alpha x) \cos \beta y e^{-\mu_0 z} d\alpha d\beta \quad (18)$$

где μ_0 - коэффициент Пуассона грунта без учета нагрузений; z - глубина слоя грунта; A'_2, C'_2 - постоянные, определяемые из соотношения (17).

В пределе, когда $V \rightarrow 0, \eta_2 \rightarrow \eta_1 \rightarrow \eta_0$, из (18) находим:

$$u_z = 1/E_1 \iint_0^{\infty} [1 + \eta_0 z / 2(1 - \mu_1^2)] (A'_2 \cos \alpha x + C'_2 \sin \alpha x) \cos \beta y e^{-\eta_1 z} d\alpha d\beta \quad (19)$$

Эти значения совпадают с решением для действия статической нагрузки, когда $V = 0$. Функция $F(x, y, z)$ получает вид:

$$F = 1/k^2 E_1 \iint_0^{\infty} [\alpha^2 + \beta^2 + \eta_2^2 / \alpha^2 \eta_1] (A'_2 \cos \alpha x + C'_2 \sin \alpha x) \cos \beta y e^{-\eta_1 z} d\alpha d\beta \quad (20)$$

Учитывая (8) для объемного расширения из (2) находим:

$$\theta = h^2 \partial^2 F / \partial x^2, \text{ откуда}$$

$$\theta = -v_1 / (\lambda + 2v_1) E_1 \iint_0^{\infty} [\alpha^2 + \beta^2 + \eta_2^2 / \eta_1] (A'_2 \cos \alpha x + C'_2 \sin \alpha x) \cos \beta y e^{-\eta_1 z} d\alpha d\beta \quad (21)$$

Компоненты напряжений по глубине оснований имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_z = \lambda \theta + 2v_1 \partial u_z / \partial z = -1/2(1 - \mu^2) \iint_0^{\infty} 1/\eta_1 [2(\alpha^2 + \beta^2) - (1 - \mu_1) k^2 \alpha^2] e^{-\eta_1 z} + \\ + 2(\alpha^2 + \beta^2) \eta_1 / \eta_1^2 - \eta_2^2 (\eta_2^2 e^{-\eta_1 z} - \eta_1^2 e^{-\eta_1 z}) (A'_2 \cos \alpha x + C'_2 \sin \alpha x) \cos \beta^2 y d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (22)$$

На поверхности полупространства для $z = 0$, ($\eta_2^2 = \alpha^2 + \beta^2$) находим:

$$\sigma_z(x, y, 0) = -1/2(1 - \mu^2) \iint_0^{\infty} \alpha^2 / \eta_1 [4\eta_2(\eta_1 - \eta_2) \eta_2^2 / \alpha^4 k^2 - k^2] (A'_2 \cos \alpha x + C'_2 \sin \alpha x) d\alpha d\beta \quad (23)$$

Предполагая, что давление от балок (рельса) на упругое полупространство (массив грунта нарушенной структуры) передается равномерно по ширине b . дифференциальное уравнение колеблющейся балки с учетом затухания на разрыхленном грунтовом основании подземной выработкой имеет вид:

$$d^4 W / dx^4 + \delta^2 d^2 W / dx^2 - \gamma^2 dW / dx = p(x) / B \quad (24)$$

где

$$\delta^2 = V^2 \rho / B; \quad \gamma^2 = \xi V / B \quad (25)$$

W - прогиб балки; B - жесткость балок (для двух рельсов $B = 2EI$); ρ - вес (масса) балок на единицу длины; b - ширина опорной поверхности; $\sigma_z(0, x_1) b$ - давление грунта на погонную единицу длины; $q(x_1)$ - интенсивность

внешней нагрузки; $x = x_1 - Vt$ – перенесенная координата; y - прогиб балки (рельсов); V – скорость.

Из формулы (25) значение:

$$p(x) = 1/\pi \int_0^a [A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x] d\alpha \quad (26)$$

где

$$A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi) \cos \alpha \xi d\xi; B(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi) \sin \alpha \xi d\xi \quad (27)$$

где

ξ - координаты неподвижной системы.

Когда нагрузка $q(x)$ распределена в интервале $-a \leq x \leq a$ (для сосредоточенной нагрузки $2qa \rightarrow P$, $a \rightarrow 0$), коэффициенты $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, входящие в (26), будут иметь вид:

$$A(\alpha) = 2aq \sin \alpha - bA_1(\alpha); B(\alpha) = -bB_1(\alpha) \quad (28)$$

где

$$A_1(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_z(\xi) \cos \alpha \xi d\xi; B_1(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_z(\xi) \sin \alpha \xi d\xi \quad (29)$$

Прогиб балки (рельсов) имеет следующий вид:

$$W(x) = \int_0^a C(\alpha) \cos \alpha x d\alpha + \int_0^a D(\alpha) \sin \alpha x d\alpha \quad (30)$$

После подстановки (30) в уравнение (24) получим:

$$\begin{aligned} \alpha^2(\alpha^2 - \delta^2)C(\alpha) - \alpha \gamma^2 D(\alpha) &= 1/\pi B [2q/a \sin \alpha a - bA_1(\alpha)]; \\ \alpha \gamma^2 C(\alpha) + \alpha^2(\alpha^2 - \delta^2)D(\alpha) &= -1/\pi B bB_1(\alpha); \\ C(\alpha) &= 1/\pi B G(\alpha) [2q/a \sin \alpha a (\alpha^2 - \delta^2) \alpha^2 - \alpha^2(\alpha^2 - \delta^2) bA_1(\alpha) - \gamma^2 \alpha bB_1(\alpha)]; \\ D(\alpha) &= 1/\pi B G(\alpha) [-2q/a \sin \alpha a \gamma^2 \alpha + \gamma^2 \alpha bA_1(\alpha) + \alpha^2(\alpha^2 - \delta^2) bB_1(\alpha)]. \end{aligned} \quad (31)$$

где

$G(\alpha) = \alpha^2 [\alpha^2(\alpha^2 - \delta^2)^2 + \gamma^4]$; a - полуширина распределения нагрузки.

Для $z = 0$ согласно теореме Фурье можно написать:

$$\begin{aligned} \sigma_z(x, y, 0) &= 1/\pi^2 \iint_0^a \cos \alpha x \cos \beta y W d\alpha d\beta \iint_{-\infty}^{\infty} \sigma_z \cos \alpha \lambda \cos \beta V d\lambda dV + \\ &+ 1/\pi^2 \iint_0^a \sin \alpha x \cos \beta y W d\alpha d\beta \iint_{-\infty}^{\infty} \sigma_z \sin \alpha \lambda \cos \beta V d\lambda dV \quad (32) \end{aligned}$$

Компоненты напряжений будут:

$$\begin{aligned} \sigma_Z(x, y, 0) &= -\sigma_Z(x, 0) \text{ для } W \leq b/2 \\ \sigma_Z(x, y, 0) &= 0 \text{ для } W \geq b/2 \end{aligned} \quad (33)$$

Если учесть обозначения, приведенные в формуле (29), получаем:

$$\sigma_Z(x, y, 0) = -2/\pi^2 \iint_0 [\mathbf{A}_1(\alpha) \cos \alpha x + \mathbf{B}_1(\alpha) \sin \alpha x] (\sin \beta b/2) / \beta \cos \beta W d\alpha d\beta \quad (34)$$

Сравнивая значения $\sigma_Z(x, y, 0)$ со значением (20), находим:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'_2(\alpha, \beta) &= 4(1+\mu_1)/\pi^2 \mathbf{E}(\alpha, \beta) \cdot (\sin \beta b/2) / \beta \mathbf{A}_1(\alpha); \\ \mathbf{C}'_2(\alpha, \beta) &= 4(1+\mu_1)/\pi^2 \mathbf{E}(\alpha, \beta) \cdot (\sin \beta b/2) / \beta \mathbf{B}_1(\alpha) \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\mathbf{E}(\alpha, \beta) = \alpha^2 / \eta_1 [4 \eta_2 (\eta_1 - \eta_2) \eta^2_0 / \alpha^4 c_V - c_V], \quad c_V = k^2 \quad (36)$$

Вводя переменную $\beta/\alpha = \psi$, $ab/2 = u$ и обозначив

$$\mathbf{S}(u) = \int_0 c_V \eta_1 \sin u \psi d\psi / (1-\mu_1) [4 \eta_2 \eta^2_0 (\eta_1 - \eta_2) - c^2_V], \quad (36, a)$$

получаем уравнения перемещения полупространства под рельсом в виде:
 $\mathbf{u}_Z(x, 0, 0) = -4(1-\mu_1^2)/\pi E_1 \int_0 [\mathbf{A}_1 \cos \alpha x + \mathbf{B}_1 \sin \alpha x] \mathbf{S}(u) d\alpha / \alpha \quad (36, б)$

Сравнивая перемещение (36, б) с прогибом балки (рельсы) обнаруживаем сходство показателей.

Из чего находим для $\mathbf{A}_1(\alpha)$ и $\mathbf{B}_1(\alpha)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(u) &= 2P/D_1(u) \cdot 2/b \{u(u^2 - \delta_1^2)[u(u^2 - \delta_1^2) + \varepsilon d(u)S(u)] + \gamma_1^4\}; \\ \mathbf{B}_1(u) &= 2P/D_1(u) \cdot 2/b \{u(u^2 - \delta_1^2)\gamma_1^2 - \gamma_1^2[u(u^2 - \delta_1^2) + \varepsilon d(u)S(u)]\} \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} D_1(u) &= 4[u(u^2 - \delta_1^2) + \varepsilon d(u)S(u)]^2 + 4\gamma_1^4; \\ d(u) &= u^2 (u^2 - \delta_1^2)^2 + \gamma_1^4; \\ \varepsilon &= 2/\pi (1-\mu_1^2) 1/E_1 (2/b) B; \quad \delta_1^2 = c_V \rho E_1 / 2(1+\mu_1) \rho_1 B \cdot (b/2)^2; \\ \gamma_1^2 &= \xi V / B \cdot (b/2)^3. \end{aligned} \quad (38)$$

ρ_1 - плотность грунтового основания; ρ - плотность балки, V - скорость.

Перемещение системы «балка - основание» под грузом подвижного состава на поверхности при $x = 0, y = 0, t = 0$ будет:

$$u_z(0, 0, 0) = 4(1-\mu_1)^2/\pi^2 E_1 \cdot 2/b P \int_0^\psi u(u^2 - \delta_1^2) [u(u^2 - \delta_1^2) + \varepsilon d(u) S(u)] + \gamma_1^4 / 2u \{ [u(u^2 - \delta_1^2) + \varepsilon d(u) S(u)]^2 + \gamma_1^4 \} \quad (39)$$

Если затухание отсутствует, т.е. $\gamma_1 = 0$, то получим:

$$u_z(0, 0, 0) = 4(1-\mu_1)^2/\pi^2 E_1 \cdot 2/b P \int_0^\psi S(u) du / 2u + 2\varepsilon u^2 (u^2 - \delta_1^2) S(u) \quad (40)$$

Для больших значений ψ подынтегральное выражение $S(u)$ стремится к значению $(1 - \mu_1) c_v / \psi \cdot \eta_0^3$, так как

$$\eta_1^2 - \eta_2^2 = c_v / 2(1 - \mu_1) \text{ и } \eta_1 \rightarrow \eta_2 \rightarrow \eta_0, c_v = k^2$$

Перемещение под силой P при $x = 0$ и изгибающий момент сечения балки под ней будет иметь вид:

$$u_z(0, 0, 0) = 4(1-\mu_1^2)/\pi^2 E_1 \cdot 2/b f(\varepsilon, \delta) P, \quad (41)$$

$$M_z = -B u_z''(0, 0, 0) = 4(1-\mu_1^2)/\pi^2 E_1 \cdot (2/b)^3 B m(\varepsilon, \delta) P \quad (42)$$

где $f(\varepsilon, \delta)$ - функции приращения перемещений, зависящие от модуля деформации рыхлого грунта E_1 , коэффициента Пуассона μ_1 , жесткости балки B и от $c_v = k^2$.

Учитывая, что разрыхленный грунт в результате влияний подземной выработки обладают незначительным модулем деформации, можно принимать $E_1 = 10$ Па, коэффициент Пуассона $\mu_1 = 0,3$, плотность грунта $\rho_1 = 17$ кН/м³ (хотя в рыхлом грунте $\rho_1 = 13,71$ кН/м³), жесткость двух рельсов $B = 2 \cdot 2016E$, которые лежат на основании шириной $b = 270$ см. Для этого случая можно вычислить по формуле:

$$\varepsilon = 2/\pi (1-\mu_1^2) (2/b)^4 B/E_1 = \varepsilon_0/E_1,$$

$$\delta_1^2 = \rho/\rho_1 (b/2)^2 \cdot c_v E_1 / 2(1+\mu_1) B = \delta_0^2 c_v E_1 \cdot 10^{-4}$$

и получить $\varepsilon_0 \approx 7,5 \div 9$; $\delta_0^2 \approx 2,0 \div 4,0$.

Если принимать $c_v = 0$; $c_v = 0,25$; $c_v = 0,5$, то:

при $c_v = 0$, $f(\varepsilon, \delta) = 1,55$; $m(\varepsilon, \delta) = 3,28$;

при $c_v = 0,25$, $f(\varepsilon, \delta) = 1,70$; $m(\varepsilon, \delta) = 3,54$;

при $c_v = 0,5$, $f(\varepsilon, \delta) = 1,94$; $m(\varepsilon, \delta) = 3,8$;

при $c_v = 0,7$, $f(\varepsilon, \delta) = 2,39$; $m(\varepsilon, \delta) = 4,21$;

при $c_v = 0,85$, $f(\varepsilon, \delta) = 6,43$; $m(\varepsilon, \delta) = 6,39$.

Для рыхлых грунтов c_v находится в пределах $c_v = 0 \div 0,25$.

Скорость перемещения нагрузки P для рыхлого грунта при $\rho_1 = 17 \text{ кН/м}^3 = 17 \cdot 10^{-3} \text{ Н/см}^3$ можно определить формулой:

$$V = \sqrt{C_v \mu_1 / C_v E_1} = 171,23 \sqrt{10^{-2} \cdot C_v E_1}, \text{ км/ч}$$

Тогда перемещение и изгибающий момент под силой P , будет как приведено в таблице 1.

Таблица 1

Перемещение u_z , изгибающий момент M_z и напряжения при различных значениях c_v рыхлых грунтов

c_v	V , км/ч	$u_z(0,0,0)$	$M_z \cdot 10^{-6}$, $\text{Н} \cdot \text{см}^2$	σ_z , Па
0	0	0,2184	2,355	47,31
0,25	121,1	0,2372	2,543	53,1
0,5	171,23	0,2737	2,739	55,0
0,7	202,6	0,40	3,04	61,1
0,85	223,9	0,93	4,26	85,6

Из табл. 1 видно, что с возрастанием скорости V прогиб рельса значительно увеличивается, а напряжение σ_z возрастает медленнее, однако для рыхлого грунта (при $\rho_1 = 14 \text{ кН/м}^3$) оно будет увеличиваться в 3 раза.

Из приведенных результатов анализа следует, что на участках, где производят подземные разработки полезных ископаемых по ширине железнодорожной насыпи (вдоль дороги на участке подработки) на глубине активной зоны насыпного грунта в области «мульды оседания» в результате сдвигов и деформаций земной поверхности происходит разрыхление насыпей и основание не обеспечивает податливость системы.

Во избежание аварийных ситуаций в системе необходимо выполнить специфические конструкции упругоподатливого основания. Это осуществляется следующим образом. Глубокая «мульда оседания» сначала заполняется и уплотняется обычным грунтом, а сверху толщиной $2 \div 2,5$ м засыпается (послойно) песчано-щебеночной смесью влажностью $W = 14 \div 16$ %. Смесью состоит из крупного песка (диаметром $0,5 \div 2$ мм) и щебня (крупностью 40 - 70 мм). Каждый слой толщиной $10 \div 15$ см уплотняется катками. Насыпь под железной дорогой выполняется сначала песком $50 \div 60$ см, а затем щебнем диаметром $40 \div 70$ мм. Такое основание работает как упругоподатливое и обеспечивает устойчивость системы.

Применение железобетонных шпал и упругоподатливого основания увеличивает значение ϵ_0 от 9 до 250 и соответственно функции $f(\rho, \delta)$ и $m(\epsilon, \delta)$ до величины 4000, и обеспечивает устойчивость и долговечность сооружений.

ВЫВОДЫ:

Математически смоделированы процессы установившихся колебаний в системе «передвижная нагрузка – бесконечно длинная балка – упругое основание на расслабленном грунте», которые в результате подземной выработки получили сдвиг и деформации земной поверхности, что привело к возникновению «мульды оседания». Предложено конструктивное решение получения упругоподатливого основания на насыпном грунте при заполнении «мульды оседания».

Литература:

1. Филиппов А.П. и др. Воздействие динамических нагрузок на элементы конструкций. /А.П. Филиппов, С.С. Кохманюк, Ю.С. Воробьев. Изд. «Наукова думка», К. – 1974. – 176с.
2. Филиппов А.П. и др. Динамическое воздействие подвижных нагрузок на стержни. /А.П. Филиппов, С.С. Кохманюк. К.: Наукова думка, 1967. – 160с.
3. Fryba L. Vibration of Solids and Structures under moving loads. Academia, Prague, 1972.
4. Kenney S. T. Steady – state vibration of beams on elastic foundation for moving load. – I. Appl. Mech., 1965, 24, 4.
5. Самедов А.М. и др. О расчете жестких сводчатых (или арочных) элементов конструкций подземных сооружений. /А.М. Самедов, С.В. Савченко, И. В Мигаль.– Научно – технический журнал «Новые технологии в строительстве» НДІБВ, 1 (19)'10, г. Киев 2010 г., с. 43 – 51.
6. Вялов С.С. Реологические основы механики грунтов. /С.С. Вялов. – М.: Высшая школа, 1978. – 477 с. – Библиогр.: с. 473÷476 – 2000 экз.
7. Самедов А.М. О реологических моделях лессовых грунтов просадочных грунтов. Вісник НТУУ «КПІ», серія «Гірництво», вип. 3, К. 2000, с. 39 – 44.
8. Folgue I. Reology Properties of Compacted Unsaturated Soils, Proc. 5th Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng. Paris,1, 113÷116 (1961 – в).